18/05/17

$\Downarrow$ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \begin{cases} \log x = \sum_k a_k (x-1)^k \\ \log(1+x) = \sum_k a_n x^k . \end{cases}$$

β) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

γ) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

δ) $f(x) = \log(1+x)$, $x \in (-1, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \left[= -(1+x)^{-2} \right]$

$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \left[= 2(1+x)^{-3} \right]$

$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad \left[= -6(1+x)^{-4} \right]$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)(1+x)^{-k} \quad , k \geq 1,$$

↑ Αποδεικνύεται με επαγωγή.

$$f(0) = 0$$

$$f^{k}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

$$\left(= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right)$$

Έστω $x > -1$.

Από την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου Taylor:

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{1}{\cancel{n!}} \int_0^x (-1)^n \cancel{n!} \frac{1}{(1+t)^{n+1}} (x-t)^n\,dt$$

$$= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής.

$$u = \frac{x-t}{1+t}.$$

Για $t=0 \rightsquigarrow y=x$

$t=x \rightsquigarrow y=0$

$$y=\frac{x-t}{1+t} \Leftrightarrow y+yt=x-t \Leftrightarrow t(1+y)=x-y$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{x-y}{1+y}.$$

$$dt=\frac{(-1)(1+y)-(x-y)\cdot 1}{(1+y)^2}dy=\frac{-1-x}{(1+y)^2}dy.$$

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{1+\frac{x-y}{1+y}}=\frac{1+y}{1+y+x-y}=\frac{1+y}{1+x}.$$

Έτσι $R_{n,f,0}(x)=(-1)^n\int_x^0 y^n\,\frac{1+y}{1+x}\cdot\frac{-1-x}{(1+y)^2}\,dy$

$$=(-1)^n\cdot\int_x^0\frac{y^n}{1+y}dy$$

Αν $-1<x<0$: $|R_{n,f,0}(x)|\leq\int_x^0\frac{|y|^n}{(1+x)}dy$

$$\leq\frac{1}{1+x}\int_x^0|y|^n dy$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Αν $0<x\leq 1$: $|R_{n,f,0}(x)|=\int_0^x\frac{y^n}{1+y}dy\leq\int_0^x y^n dy$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Και στις 2 περιπτώσεις προκύπτει

$$R_{n,f,0}(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Επομένως $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot x^k}{k}$.

*Σημείωση: Για $x=1$ προκύπτει ότι

$$\log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = e^{x^2}$

Εφόσον $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$.

Άρα $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τα: $\sin(x^2)$, $\sin(x^3)$, ...,
$\cos(x^2)$, $\cos(x^3)$, ...

NO DATE

Από του Απ. Ι: Αν $f: I \to \mathbb{R}$,
x_0 εσωτ. σημείο του I και $f'(x_0)=0$:
- αν $f''(x_0)>0$, τότε η f έχει τοπ. ελαχ. στο x_0.
- αν $f''(x_0)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Το θεώρημα αυτό δεν δίνει συμπέρασμα όταν $f''(x_0)=0$.

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Αν $f: I \to \mathbb{R}$, x_0 εσωτ. σημείο του I ώστε $f'(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

α) Αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

β) Αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)<0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

γ) Αν n περιττός, η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

Αποδ.

Αντικαθιστώντας την f με την $f(x)-f(x_0)$ μπορούμε να υποθέσουμε χβγ ότι $f(x_0)=0$

$$T_{n,f,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

NO DATE

Από προηγούμενη πρόταση

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

όπου $T_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right)=0$$

Άρα $\exists\, \delta>0$ ώστε για $\underbrace{x \text{ κοντά στο } x_0}_{x\in(x_0-\delta,\,x_0)\cup(x_0,\,x_0+\delta)}$

το $\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ να είναι ομόσημο του $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

α,β)
Αν n άρτιος $(x-x_0)^n>0$ για $x\neq x_0$.
άρα $f(x)$ ομόσημο με το $f^{(n)}(x_0)$.

α) Αν $f^{(n)}(x_0)>0$ τότε $f(x)>0=f(x_0)$ για x κοντά στο x_0., άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

β) Αν $f^{(n)}(x_0)<0$ τότε $f(x)<0=f(x_0)$ για x κοντά στο x_0, άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

γ) Αν n περιττός τότε:

$(x-x_0)^n>0$, για $x>x_0$

και $(x-x_0)^n<0$, για $x<x_0$.

Άρα η f αλλάζει πρόσημο δεξιά και αριστερά του x_0, συνεπώς δεν έχει ακρότατο στο x_0.

*Σημείωση: Το θεώρημα δεν δίνει απάντηση όταν $f^{(n)}(x_0)=0$, $\forall n$.
Τότε η f μπορεί να έχει τοπικό μέγ., τοπ. ελαχ., ή καθόλου ακρότατο στο x_0.

~> $$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

και $f^{(n)}(0)=0$, $\forall n$

~> $$g(x)=\begin{cases} -e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$$ τοπ. μεγ. στο 0

~> $$h(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -e^{-1/x^2}, & x<0 \end{cases}$$

NO DATE

Άσκηση

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α) Ν.δ.ο. $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\cdot e^{-1/x^2}$, για $x\neq 0$

όπου $P_n(x)$ πολυώνυμο βαθμού $2n-2$

και $P_{n+1}(x)=x^3P_n'(x)+(2-3nx^2)P_n(x)$

β) $f^{(k)}(0)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Απόδ.

Εύκολα με (DLH) $\forall k\in\mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}=0$

(με επαγωγή στο k)

Για $x\neq 0$: $f'(x)=e^{-1/x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)'=e^{-1/x^2}\left(-(-2)(x^{-3})\right)$

$$=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$$

και άρα ισχύει το ζητούμενο για $P_1(x)=2$
(πολ. βαθμού $2\cdot 1-2=0$)

Υποθέτω ότι $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\cdot e^{-1/x^2}$ με

$\deg P_n(x)=2n-2$.

$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'$

$$=\frac{\left(P_n'(x)\cdot e^{-1/x^2}+P_n(x)\cdot\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\right)x^{3n}-P_n(x)e^{-1/x^2}\,3nx^{n-1}}{x^{6n}}$$

NO. DATE

$$= \frac{P_n'(x)\cdot x^{3n} + P_n(x)\cdot 2x^{3n-3} - P_n(x)\,3n\,x^{3n-1}}{x^{6n}} \cdot e^{-1/x^2}$$

$$= \frac{x^3 P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x)}{x^{3(n+1)}} \cdot e^{-1/x^2}$$

Θέτοντας $P_{n+1}(x) = x^3 P_n'(x) + (2-3nx^2)P_n(x)$

Εξετάζοντας τον βαθμό του

Έστω β ο συντελεστής του x^{2n-2} στο πολυώνυμο $P_n(x)$.

Τότε ο συντελεστής του x^{2n} στο πολυώνυμο $P_{n+1}(x)$ θα είναι: $(\beta(2n-2) + (-3n)\beta)$

$$= \beta(-2-n) \neq 0$$

Άρα $\deg P_{n+1}(x) = 2n$.